

Les différentielles de semi-martingales vraies, sections de fibrés vectoriels

LAURENT SCHWARTZ

37, Rue Pierre Nicole – 75005 Paris – France

*J'ai plaisir à publier cet article en l'honneur de I. M. Gelfand, qui est pour moi un ami,
et dont l'influence sur les mathématiques de son temps a été considérable*

Abstract. $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ has the usual meaning in probabilities. If G_A is an optional vector bundle above A (optional subset of $\mathbb{R}_+ \times \Omega$), one knows the notion of a differential of formal semi-martingale dX , cross section of G_A (symbolically $dX(t, \omega) \in G_{t, \omega}$, fiber above $(t, \omega) \in A$). We study here the differentials of true semi-martingales, sections of G_A . It is necessary to work with particular vector bundles, the \mathcal{OB} -vector bundles. Applications are given: differential of a V -valued semi-martingale, V manifold, and covariant derivative with respect to \underline{dX} of a section S of a vector bundle G_V above a manifold V with a linear connection: $\nabla_{\underline{dX}_t}(S) \in G_{X_t}$.

Résumé. $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ a la signification usuelle en probabilités. Si G_A est un espace fibré vectoriel au-dessus de A (ensemble optionnel de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$), on connaît la notion de différentielle de semi-martingale formelle, dX , section de G_A (symboliquement $dX(t, \omega) \in G_{t, \omega}$, fibre au-dessus de $(t, \omega) \in A$). Nous étudions ici les différentielles de semi-martingales vraies sections de G_A ; cela nécessite de travailler sur des fibrés particuliers, les \mathcal{OB} -fibrés. On donne quelques applications: différentielles d'une semi-martingale X à valeurs dans une variété V , et dérivée covariante suivant \underline{dX} d'une section S d'un fibré vectoriel G_V au-dessus de V , muni d'une connexion linéaire: $\nabla_{\underline{dX}_t}(S) \in G_{X_t}$.

Key-Words: differential of a semi-martingale, optional vector bundle, linear connection on a vector bundle over a manifold.

1980 MSC: 60 G A8, 53 C 05.

0. RAPPELS

(0.1) Ω est un ensemble, \mathcal{F} une tribu sur Ω , $(\mathcal{F}_t)_{t \in \bar{\mathbf{R}}}$, ($\bar{\mathbf{R}}_+ = [0, +\infty]$) une famille de tribus $\subset \mathcal{F}$, croissante et continue à droite; A sera un ensemble optionnel $\subset \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$. Avant le paragraphe 2, il n'y aura pas de probabilité sur Ω . Un fibré optionnel (ou \mathcal{O} -fibré) G_A sur A , à fibres vectorielles (sur \mathbf{R} ou \mathbf{C}) de même dimension finie N , de fibre-type G , est la donnée d'un espace avec projection $G_A \rightarrow A$, de structures vectorielles de dimension N sur les fibres $G_{t,\omega}$, $(t,\omega) \in A$, et d'une famille de trivialisations $G_{A_i} \rightarrow A_i \times G$, A_i optionnel $\subset A$ (dites trivialisations optionnelles ou \mathcal{O} -trivialisations de G_A), telles que la formule de transition d'indices i, j , soit une application $(A_i \cap A_j) \times G \rightarrow (A_i \cap A_j) \times G$, de la forme $(t, \omega, g) \mapsto (t, \omega, \alpha(t, \omega)g)$, α optionnelle sur $A_i \cap A_j$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$. On exigera que l'atlas soit complet. Mais surtout on exige que A soit réunion d'une suite $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ de domaines de trivialisations.

Tout ceci est classique et a été étudié en détail dans L. SCHWARTZ [1], paragraphe 1, (1.3) et paragraphe 2. L'originalité de ces fibrés est qu'ils ont des \mathcal{O} -trivialisations globales $G_A \rightarrow A \times G$. Un autre moyen de se donner un fibré optionnel est de se donner l'ensemble $\mathcal{O}(G_A)$ des sections dites optionnelles; il est astreint à l'unique condition qu'il existe un isomorphisme d'espaces avec projection $G_A \rightarrow A \times G$, à fibres vectorielles qui transforme $\mathcal{O}(G_A)$ en l'ensemble usuel des sections optionnelles de $A \times G$, ou l'ensemble des applications optionnelles de A dans G , $\mathcal{O}(A; G)$. Une section au-dessus de A' optionnel $\subset A$ est alors optionnelle si et seulement si son prolongement par 0 sur $A \setminus A'$ est optionnel sur A . Les \mathcal{O} -trivialisations de $G_{A'}$ sont alors exactement celles qui transforment $\mathcal{O}(G_{A'})$ en $\mathcal{O}(A'; G)$.

(0.2) Soit G_A un fibré vectoriel de dimension finie, optionnel, au dessus d'un ensemble optionnel A de $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, de fibre type G . Nous avons défini et étudié dans SCHWARTZ [1] la notion de différentielle de semi-martingale (continue) formelle dX , section de G_A , avec la notation (abusive mais intuitive) $dX(t, \omega) \in G_{t,\omega}$. Nous voulons voir ici quand on pourra dire que dX est différentielle de semi-martingale (continue) vraie, pas seulement formelle, ce qui a un sens évident si G_A est donné comme trivial, $G_A = A \times G$, et dans ce cas on peut l'intégrer si $A = \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, $X_t(\omega) = \int_0^t dX_s(\omega)$, X semi-martingale (continue) vraie sur $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, à valeurs dans G . Ce ne sera pas possible avec la seule donnée de G_A et de dX dans les cas général, il faudra introduire pour G_A une donnée supplémentaire, une \mathcal{OB} -structure et, si G_A n'est pas trivial, même si dX est une différentielle de semi-martingale vraie, $A = \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, $X_t = \int_0^t dX_s$ n'aura pas de sens si G_A n'est pas donné comme trivial $= A \times G$, parce que les $dX_s \in G_{s,\omega}$ sont dans des fibres différentes.

1. LES \mathcal{OB} -STRUCTURES

On pose $A(\omega) = \{t \in \bar{\mathbb{R}}_+; (t, \omega) \in A\} \subset \bar{\mathbb{R}}_+$. Si f est une fonction sur A , sa trajectoire relative à ω est $f(\omega) : t \mapsto f(t, \omega)$. Nous disons que f est trajectoires bornées si chaque $f(\omega)$ est bornée.

Les seuls A qui semblent devoir être intéressants pour l'étude des différentielles de semi-martingales vraies sont ceux qui sont optionnelles et de la forme $A = [S, T]$, S et T temps d'arrêt, $[S(\omega), T(\omega)] = [S(\omega), T(\omega)[$ ou $[S(\omega), T(\omega)]$, pas forcément le même pour tous les ω .

DÉFINITION (1.1). Une \mathcal{OB} structure sur G_A (\mathcal{O} initiale de optionnel, \mathcal{B} de borné) au dessus de $A = [S, T]$ est la donnée d'un ensemble $\mathcal{B}(G_A)$ de sections de G_A , dit l'ensemble des sections à trajectoires localement bornées, astreint à la condition suivante:

(1.1.1) Il existe une trivialisations optionnelle globale $\rho : G_A \rightarrow A \times G$, qui transforme $\mathcal{B}(G_A)$ en l'ensemble $\mathcal{B}(A; G)$ des applications de A dans G , à trajectoires localement bornées (i.e. bornées sur tout compact de tout $[S(\omega), T(\omega)]$). Une telle trivialisations est dite une \mathcal{OB} -trivialisations de la \mathcal{OB} -structure. On obtiendra toutes les autres comme $\rho' : G_A \rightarrow A \times G, \rho' \rho^{-1} : (t, \omega, g) \mapsto (t, g, \alpha(t, \omega)g), \alpha$ application de A dans $\mathcal{L}(G; G)$, optionnelle, à la trajectoires localement bornées ainsi que son inverse; $\mathcal{OB}(G_A)$ désignera l'espace des sections optionnelles à trajectoires localement bornées.

PROPOSITION (1.2). 1) Soit τ un temps d'arrêt, $S \leq \tau \leq T$, et $A' = [A, \tau]$ optionnel. Une \mathcal{OB} -structure sur A en induit une sur A' , en convenant que toute \mathcal{OB} -trivialisations de A en est une pour A' . Si c'est vrai pour une \mathcal{OB} -trivialisations de A , c'est vrai pour toutes les autres.

2) Soit \mathcal{B} (resp. \mathcal{OB}) l'ensemble des fonctions réelles sur A , à trajectoires localement bornées (resp. et optionnelles); $\mathcal{B}(G_A)$ est un \mathcal{B} -module pour la multiplication, $\mathcal{OB}(G_A)$ un \mathcal{OB} -module.

PROPOSITION (1.3). Soient G_A, H_A , deux \mathcal{OB} -fibres. Le fibre optionnel $\mathcal{L}(G_A; H_A)$ (de définition triviale; la fibre au-dessus de (t, ω) est $\mathcal{L}(G_{(t, \omega)}; H_{(t, \omega)})$, où \mathcal{L} est l'espace des applications linéaires) admet une structures canonique de \mathcal{OB} -fibre, où $\mathcal{B}(\mathcal{L}(G_A; H_A))$ est l'ensemble des sections de $\mathcal{L}(G_A; H_A)$ qui envoient toute section $\in \mathcal{B}(G_A)$ sur une section $\in \mathcal{B}(H_A)$.

Si ρ, σ , sont des \mathcal{OB} -trivialisations de G_A, H_A , sur $A \times G, A \times H$, une \mathcal{OB} -trivialisations $\mathcal{L}(G_A; H_A) \rightarrow \mathcal{L}(A \times G; A \times H) = A \times \mathcal{L}(G; H)$ est $u \mapsto \sigma u \rho^{-1}$.

La notion de sous-fibré optionnel est bien connue, voir par exemple L. SCHWARTZ [1], (2.1) page 704. On peut dire que le sous-espace avec projection H_A de G_A est sous-fibré optionnel si les sections optionnelles de H_A sont exactement celles qui, considérées comme sections de G_A , sont optionnelles; ou bien si, pour toute \mathcal{O} -trivialisati- on $G_A \simeq A \times G$ de $H_A, (t, \omega) \mapsto H_{(t, \omega)}$ est une fonction optionnelle sur A à va- leurs dans la grassmannienne $Gr(G; n)$ des n -plans de $G, n =$ dimension des fibres de H_A ; ou bien s'il existe des \mathcal{O} -trivialisations «simultanées», $G_A \simeq A \times G$ où H_A vient sur un $A \times H, H$ sous-espace vectoriel fixe de G . Nous utiliserons tout cela à la fois ici.

PROPOSITION (1.4). *Si G_A est muni d'une \mathcal{OB} -structure, et si $H_A \subset G_A$ est un sous fibré optionnel de G_A, H_A et canoniquement muni d'une \mathcal{OB} -structure dite induite, en disant qu'une section de H_A est en $\mathcal{B}(H_A)$ si et seulement si, considérée comme section de G_A , elle est en $\mathcal{B}(G_A)$. Il existe des \mathcal{OB} -trivialisations communes: $G_A \rightarrow A \times G$, où H_A vient sur un $A \times H, H$ sous-espace vectoriel de G .*

DÉMONSTRATION. On peut toujours supposer G_A \mathcal{OB} -trivialisé, $G_A = A \times G$. Mais H_A ne l'est pas; il s'agit de trouver une nouvelle \mathcal{OB} -trivialisati- on de G_A qui trivialis- e en même temps H_A .

Soit (e_1, e_2, \dots, e_N) une base de G , et soit n la dimension des fibres de H_A .

Soit P l'ensemble des parties à n éléments de $\{1, 2, \dots, N\}$; pour $p \in P$, soit G_p le sous-espace vectoriel de base $(e_k)_{k \in p}$ dans G . Soit π la projection de \mathbf{R}^N sur G_p parallèlement à $G_{P \setminus p}$. Si F est un sous-espace de G , de dimension n , supplémentaire de $G_{P \setminus p}$, ce que nous écrivons $F \in Gr(G; n, p)$ (où $Gr(G; n)$ est la grassmannienne des n -plans de G), la projection $\pi|_F$, restriction de π à F , est une bijection linéaire de F sur G_p , de bijection réciproque $\sigma_F; \pi \sigma_F = I_{G_p}$, et $\sigma_F \pi$ est la projection de G sur F , parallèlement à $G_{P \setminus p}$. On peut considérer π comme $\in \mathcal{L}(G; G_p)$ et σ_F comme $\in \mathcal{L}(G_p; G)$ et, si on munit la grassmannienne de sa struc- ture C^∞ bien connue, $F \mapsto \sigma_F$ est C^∞ de $Gr(G; n, p)$ dans $\mathcal{L}(G_p; G)$. L'applica- tion linéaire u_F de G dans lui-même, égale à π sur F et à l'identité sur $G_{P \setminus p}$ est une bijection linéaire, qui s'écrit $\pi + (1 - \sigma_F \pi)$; elle dépend C^∞ de $F \in Gr(G; n, p)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$, et envoie bijectivement F sur G_p . Son inverse u_F^{-1} est donc aussi une fonction C^∞ de $Gr(G; n, p)$ dans $\mathcal{L}(G; G)$; elle est une bijection de G_p sur F . Ensuite $(t, \omega) \mapsto H_{(t, \omega)}$ est une application optionnelle de A dans $Gr(G; n)$; soit A_p l'image réciproque de $Gr(G; n, p)$, c'est une partie optionnelle de A , et $A = \bigcup_{p \in P} A_p$. Sur A_p , on peut réaliser une trivialisati- on simultanée u_p de $G_{A_p} = A_p \times G$ et de H_{A_p} , en posant $u_p(t, \omega, g) = (t, \omega, u_{H_{(t, \omega)}} g)$; elle est un morphi- sme de fibrés optionnels de $G_{A_p} = A_p \times G$ sur lui-même, envoyant H_{A_p} sur $A_p \times G_p$, et inversible, c'est un isomorphisme de fibrés optionnelles, réalisant une trivialisati- on simultanée de (G_A, H_A) par $(A_p \times G, A_p \times G_p)$. C'est ainsi qu'on passe de la 2ème

définition à la 3ème après (1.3). Mais ce n'est pas un morphisme borné de $A_p \times G$ sur lui-même, car une fonction C^∞ sur l'ouvert $Gr(G; n; p)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$ n'est pas forcément bornée. Mais si K est un compact de $Gr(G; n; p)$, u_F est bornée pour $F \in K$, et son inverse u_F^{-1} aussi, puisqu'elle dépend C^∞ donc continuellement de $F \in K$. Si alors A_K est l'image réciproque de K par $(t, \omega) \mapsto H_{(t, \omega)}$, u_p restreinte à A_K est une \mathcal{O} -trivialisatation simultanée $G_{A_K} \mapsto A_K \times G, H_{A_K} \rightarrow A_K \times G_p$, et u_p est bornée de A_K à la valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$, ainsi que son inverse.

Les $Gr(G; n; p), p \in P$, forment un recouvrement ouvert de la grassmannienne $Gr(G; n)$, donc il admet un recouvrement subordonné $(K_p)_{p \in P}, K_p$ compact; donc les A_{K_p} recouvrent A . On trouvera comme suit une trivialisatation commune. On ordonne $P : p_1, p_2, \dots, p_\nu$. On appellera α_{p_k} un automorphisme de G qui envoie G_{p_k} sur un sous-espace vectoriel fixe H . Si alors α est l'application de A dans l'ensemble des automorphismes de G qui vaut α_{p_0} sur $A_{k_{p_0}}, \dots, \alpha_{p_k}$ sur $A_{K_p} \setminus A_{K_0} \setminus A_{K_{p_{k-1}}}, \dots, \alpha$ est bornée à valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$ ainsi que $\alpha^{-1}; (t, \omega, g) \mapsto (t, \omega, \alpha(t, \omega)u_{H(t, \omega)}g)$ définit une nouvelle \mathcal{OB} -trivialisatation de $G_A = A \times G$, mais qui envoie H_A sur $A \times H$, d'où le résultat. ■

REMARQUE (1.4.1). Dans la pratique, il n'est pas nécessaire de rechercher une \mathcal{OB} -trivialisatation de H_A , dès qu'il est sous fibré optionnel d'un G_A dont on a une \mathcal{OB} -trivialisatation $A \times G : \mathcal{B}(H_A)$ est l'ensemble des sections de H_A , qui sont des applications de A dans G à trajectoires localement bornées.

(1.5) Supposons que G_A soit non seulement un fibré optionnel, mais un fibré *continu* optionnel. On se donne une famille de trivialisatation, dites continues (ou topologiques) optionnelles, $\rho_i : G_A \rightarrow A_i \times G, A_i$ *ouverts* optionnelles (parce que c'est une fibration topologique) telles que $\rho_i \rho_j^{-1} : (A_i \cap A_j) \times G \rightarrow (A_i \cap A_j) \times G$ soit de la forme $(t, \omega, g) \mapsto (t, \omega, \alpha(t, \omega))g$, où α est *continue* optionnelle sur $A_i \cap A_j$ à valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$. On exige toujours en plus qu'il existe une suite de domaines de trivialisatations optionnelles, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de réunion A . En général, il n'existe pas de trivialisatation *continue* optionnelle globale $G_A \rightarrow A \times G$. On a une notion de sous-fibré H_A continu optionnel de G_A ; il y a beaucoup de définitions équivalentes, l'une d'elles étant que, sur toute carte $G_{A_i} = A_i \times G, (t, \omega) \mapsto H_{t, \omega}$ soit continue optionnelle de A_i dans la grassmannienne $Gr(G; n)$, n dimension des fibres de H_A . Cela rejoint (1.3).

(1.5.1) Si G_A est continu optionnel, il existe a priori une notion naturelle de l'ensemble $\mathcal{B}(G_A)$ des sections de G_A à trajectoires localement bornées. On peut en effet mettre sur G_A un champ continu de structures euclidiennes (de formes quadratiques > 0) sur les fibres; on le fait au voisinage de chaque point de $A(\omega)$, et on recolle par partition de l'unité du localement compact $A(\omega)$. Deux de ces structures euclidiennes sont équivalentes au dessus de chaque compact de $A(\omega)$. Il sera alors naturel d'appeler

$\mathcal{B}(G_A)$ l'ensemble des sections qui sont bornées (pour la norme euclidienne) au-dessus de tout compact de tout $A(\omega)$. Mais il n'y a aucune raison d'affirmer qu'on ait là une \mathcal{OB} -structure, c'est à dire qu'il existe des \mathcal{OB} -trivialisations correspondantes (elles ne peuvent être qu'optionnelles, il n'y a pas de trivialisations continues globales). Et s'il n'en existe pas, il semble qu'on ne puisse pas s'en servir.

PROPOSITION (1.5.2). *Supposons G_A projectif, c'est à dire sous-fibré continu optionnel d'un fibré trivial $A \times E$. Alors la structure définie à (1.5.1) est une \mathcal{OB} -structure, induite par celle de $A \times E$; elle est indépendante du plongement dans un fibré trivial.*

DÉMONSTRATION. La structure est évidemment celle qui est induite par $A \times E$ et on applique (1.4). L'indépendance du plongement résulte de ce que la définition (1.5.1) est intrinsèque. Elle est aussi évidente directement: si $G_A \subset A \times E$ et $A \times F$, l'application identique de G_A se prolonge en une fonction u sur A à valeurs dans $\mathcal{L}(E; F)$ continue donc à trajectoires localement bornées: u sera l'identité sur G_A , et 0 sur l'orthogonal de G_A dans E . ■

REMARQUE (1.5.3). Voir remarque (1.4.1):

$\mathcal{B}(G_A)$ est l'ensemble des sections de G_A , applications de A dans E à trajectoires localement bornées. C'est plus simple que de trivaliser H_A .

(1.6) Voici un cas fréquent dans la pratique probabiliste.

Soit Y une application optionnelle continue de A dans un espace topologique V , et \mathcal{G}_V un fibré topologique sur V , à fibres vectorielles de dimension finie. On peut prendre le fibré image réciproque $G_A = \mathcal{G}_V \circ Y$, de fibres $G_{(t,\omega)} = G_{Y(t,\omega)}$. C'est un fibré optionnel continu. Dans des cas très généraux (par exemple si V est compact ou est une variété topologique), \mathcal{G}_V est sous fibré topologique d'un fibré trivial $V \times E$ (voir L. SCHWARTZ [1], remarque (1.7) page 699); alors G_A sera sous-fibré optionnel continu du fibré trivial $A \times E$, $G_{t,\omega} = G_{Y(t,\omega)} \subset E$. Il aura donc une \mathcal{OB} -structure naturelle définie à (1.5.2): une section s de G_A est dans $\mathcal{B}(G_A)$ si et seulement si, pour tout ω , $(t, \omega) \mapsto s(t, \omega) \in G_{Y(t,\omega)} \subset E$ est localement bornée sur $A(\omega)$. On dira volontiers section de \mathcal{G}_V le long de X ou au-dessus de X , au lieu de section de G_A .

2. DIFFÉRENTIELLES DE SEMI-MARTINGALES (SOUS-ENTENDU: CONTINUES) FORMELLES ET VRAIES

Rappelons une définition (ici il y a une probabilité \mathbf{P} sur Ω, \mathcal{F}).

DÉFINITION (2.1). *Soit A optionnel $\subset \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega, G_A$ un fibré optionnel sur A . On*

appelle différentielle de semi-martingale formelle (en abrégé d.s.m.f.) section de G_A , la donnée, pour toute trivialisations $G_A \simeq A \times G$, d'une différentielle de s.m.f. à valeurs dans G , de manière que, si $(t, \omega, g) \mapsto (t, \omega, \alpha(t, \omega)g)$ est la formule de transition $A \times G \rightarrow A \times G$ des deux trivialisations, la formule de transition pour des d.s.m.f. correspondantes soit $dX \mapsto \alpha dX$ (α est une application optionnelle de A dans $\mathcal{L}(G; G)$) (voir L. SCHWARTZ [3])

DÉFINITION (2.2). On dit qu'un processus X sur un ouvert relatif optionnel A de $[S, T]$ à valeurs dans G est une semi-martingale vraie, s.m.v., s'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts optionnels de A , de réunion A , et de semi-martingales X_n sur $\bar{R}_+ \times \Omega$, telles que $X \underset{A_n}{\sim} X_n$.

Définition due à P. A. MEYER [1], et ces semi-martingales sont étudiées systématiquement dans L. SCHWARTZ [2].

On va utiliser une définition meilleure spéciale au cas $A = [S, T]$. Soit $T_n = \text{Inf} \{t \in [S, T]; t \notin A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n\}$, c'est un temps d'arrêt; $[S, T_n[\subset A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$, et X est équivalent dans $A \cap [S, T_n[$ à $Y_n = 1_{A_0} \cdot X_0 + 1_{A_1 \setminus A_0} \cdot X_1 + \dots + 1_{A_n \setminus A_0 \setminus A_1 \dots \setminus A_{n-1}} \cdot X_n$, s.m. sur $\bar{R}_+ \times \Omega$. L'équivalence subsiste dans $A \cap [S, T_n[$ par continuité. Enfin $T_n \uparrow T$, c'est à dire T_n tend vers T pour n infini, stationnairement sur $\{T = T\}$. Les $A \cap [S, T_n[$ sont des ouverts optionnels de A , mais leur réunion n'est peut être pas A . Nous pouvons remplacer $[S, T_n[$ par $[S, T_n]$ aux points ω où $T_n(\omega) = T(\omega) \in A(\omega)$, l'équivalence subsiste par continuité, mais pour les $[S, T_n]$ ainsi obtenus, $\bigcup_n (A \cap [S, T_n]) = A$ et $A \cap [S, T_n] = [S, T_n] = A \cap [S, T_n]$ est ouvert dans A ; nous retrouvons donc une propriété de la forme (2.1). Donc:

DÉFINITION (2.3). Un processus X sur $A = [S, T]$ à valeurs dans G est une s.m.v. si et seulement si il existe une suite de temps d'arrêt $T_n \uparrow T$ et une suite de s.m.v. Y_n sur $\bar{R}_+ \times \Omega$ tels que $X \underset{A \cap [S, T_n]}{\sim} Y_n$. P. A. MEYER - C. STRICKER [1].

DÉFINITION (2.4). Une d.s.m.f. section de G_A , \mathcal{OB} -fibré optionnel, est dite d.s.m.v. si elle devient la différentielle d'une s.m.v. sur A à valeurs dans G , pour toute \mathcal{OB} -trivialisations ρ de la \mathcal{OB} -structure.

PROPOSITION (2.4.1). Si elle le devient pour une \mathcal{OB} -trivialisations ρ , elle le devient pour toute autre \mathcal{OB} -trivialisations ρ' .

En effet, $\rho' \rho^{-1}$ est de la forme $(t, \omega, g) \mapsto (t, \omega, \alpha(t, \omega)g)$ où α est une fonction sur A à valeurs dans $\mathcal{L}(G; G)$, à trajectoire bornées sur tout compact de tout $A(\omega)$. Posons $\tau_n = \text{inf} \{t \in [S, T]; \|\alpha_t\|_{\mathcal{L}(G; G)} > n\}$; $\tau_n \uparrow T$; α est bornée par n sur

$A \cap [S, \tau_n[$, donc aussi à trajectoires bornées sur $A \cap [S, \tau_n]$ (on ajoute au plus un point par trajectoire). Si dX est l'expression de la d.s.m.f. pour ρ , différentielle d'une s.m.v. sur A à valeurs dans G , donc $dX \underset{A \cap [S, \tau_n]}{\sim} dY_n$, alors son expression pour ρ' sera $dX' = \alpha dX \underset{A \cap [S, \tau_n \wedge \tau_n]}{\sim} \alpha 1_{A \cap [S, \tau_n]} dY_n$, d.s.m.v. sur $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, parce que $\alpha 1_{A \cap [S, \tau_n]}$ est à trajectoires bornées; donc αdX est une d.s.m.v. ■

DÉFINITION (2.5). *Mêmes définition pour des d.v.f.v. (différentielles de processus à variation localement finie vrais), d.m.v. (différentielles de martingales vraies, martingale voulant dire martingale locale continue), différentielles de martingales conformes vraies si G_A est complexe (G complexe, $\mathcal{L}(G; G) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(G; G)$).*

Si une d.s.m.v. est une d.m.f. elle est une d.m.v., etc... Pour toute d.s.m.v. dX section de G_A , on aura une décomposition $dX = d\tilde{X} + dX^c$, et un crochet $\frac{1}{2}dX dX$, d.v.f.v. section de $G_A \odot G_A$.

PROPOSITION (2.6). *Soit G_A un $\mathcal{O}\mathcal{B}$ -fibré optionnel, H_A un sous-fibré optionnel, donc $\mathcal{O}\mathcal{B}$ -fibré (1.4). Une d.s.m.f. section de H_A , qui devient section de G_A , l'est déjà comme section de H_A .*

DÉMONSTRATION. Il y a des $\mathcal{O}\mathcal{B}$ -trivialisations communes $G_A \simeq A \times G, H_A \simeq A \times H$ par (1.4). ■

PROPOSITION (2.6.1). *Soient dX une d.s.m.v. section de G_A , u une section $\in \mathcal{O}\mathcal{B}(\mathcal{L}(G_A; H_A))$, alors udX est une d.s.m.v. section de H_A . En particulier, l'espace des d.s.m.v. sections de G_A est un $\mathcal{O}\mathcal{B}$ -module pour la multiplication.*

DÉMONSTRATION. Evident par des $\mathcal{O}\mathcal{B}$ -trivialisations de G_A et H_A , voir (1.3), et une modification évidente de la démonstration de (2.4.1). ■

PROPOSITION (2.7). *Soient $\mathcal{O}\mathcal{B}$ l'anneau des fonctions réelles optionnelles à trajectoires localement bornées, d.s.m.v. le $\mathcal{O}\mathcal{B}$ -module des d.s.m.v. réelles, $\mathcal{O}\mathcal{B}(G_A)$ le $\mathcal{O}\mathcal{B}$ -module de sections optionnelles à trajectoires localement bornées de G_A , d.s.m.v. (G_A) le $\mathcal{O}\mathcal{B}$ -module des d.s.m.v. sections de G_A . Alors*

$$(2.7.1) \quad \text{d.s.m.v. } (G_A) = \mathcal{O}\mathcal{B}(G_A) \underset{\mathcal{O}\mathcal{B}}{\otimes} \text{d.s.m.v.}$$

$$(2.7.2) \quad \text{d.s.m.v. } (G_A) = \underset{\mathcal{O}\mathcal{B}}{\text{Hom}}(\mathcal{O}\mathcal{B}(G_A^*); \text{d.s.m.v.})$$

DÉMONSTRATION. On \mathcal{OB} -trivialise G_A , donc G_A^* . Ensuite on utilise des formules un peu «bourbachiques» sur les produits tensoriels:

$$\begin{aligned}
 \text{d.s.m.v.} (G_A) &= \text{d.s.m.v.} \bigotimes_{\mathbf{R}} G = (\text{d.s.m.v.} \bigotimes_{\mathcal{OB}} \mathcal{OB}) \bigotimes_{\mathbf{R}} G = \\
 (2.7.1) \qquad &= \text{d.s.m.v.} \bigotimes_{\mathcal{OB}} (\mathcal{OB} \bigotimes_{\mathbf{R}} G) = \\
 &= \text{d.s.m.v.} \bigotimes_{\mathcal{OB}} \mathcal{OB}(G_A).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d.s.m.v.} (G_A) &= \text{d.s.m.v.} \bigotimes_{\mathbf{R}} G = \text{Hom}_{\mathbf{R}}(G^*; \text{d.s.m.v.}) = \\
 (2.7.2) \qquad &= \text{Hom}_{\mathcal{OB}}(\mathcal{OB} \bigotimes_{\mathbf{R}} G^*; \text{d.s.m.v.}) = \\
 &= \text{Hom}_{\mathcal{OB}}(\mathcal{OB}(G_A^*); \text{d.s.m.v.}).
 \end{aligned}$$

Plus simplement, pour éviter Bourbaki, on prend une base de G et tout devient évident. Nous avons déjà démontré ces formules pour les d.m.s.f., proposition (1.3) page 677 de SCHWARTZ [2]. ■

2.8. Encore une fois, pourquoi dX et pas X ?

Sur une variété C^∞ , on distingue les formes différentielles de divers degrés, sans jamais les identifier; et de même les courants. Prenons le cas de \mathbf{R}_+ (plus simple pour y voir clair, que $\bar{\mathbf{R}}_+$). On distinguera bien les fonctions sur \mathbf{R}_+ à valeurs dans un espace vectoriel G de dimension finie (qui sont des courants de degré 0), et les mesures (qui sont des courants de degré 1). Si f est un courant de degré 0, il a une différentielle $df = \mu$, courant de degré 1; en particulier, si f est une fonction à variation localement finie, μ est une mesure. Inversement, si μ est un courant de degré 1, il a une primitive, produit de convolution $Y * \mu = f$ (Y fonction d'Heaviside), courant de degré 0; en particulier, si μ est une mesure, f est la fonction à variation localement finie $t \mapsto \int_{[0,t]} \mu(ds) = \mu[0, t]$. On a bien toujours $\mu = df$, parce que $dY = \delta$. Si maintenant $G_{\mathbf{R}_+}$ est un fibré vectoriel C^∞ sur \mathbf{R}_+ , on a aussi des courants de degré 0 et 1 sur \mathbf{R}_+ , sections de $G_{\mathbf{R}_+}$; ils sont plus difficiles à définir, mais bien connus (voir L. SCHWARTZ, [1]). On continuera à écrire $f(t) \in G_t$, bien que cela n'ait pas de sens pour un courant, et $\mu(dt) \in G_t$, bien que cela n'ait pas non plus de sens (G_t fibre au-dessus de $t \in \mathbf{R}_+$). Mais il n'y a plus ni différentielle ni primitive, car $\mu(ds) \in G_s$ pour $s \geq t$, et les G_s sont toutes différentes; si f existe, df n'existe plus; et si on note (imprudemment!) df

une mesure, df existe, f n'existe pas (on ne peut pas écrire $f_t = \int_{[0,t]} df_s$ parce que les df_s sont dans des fibres G_s différentes, et n'ont même qu'un sens symbolique!). C'est la même chose pour des semi-martingales sur $A = [S, T] \subset \bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$. On peut parler d'une semi-martingale X section de G_A , et on a vraiment $X(t, \omega) \in G_{(t, \omega)}$ [cela nécessite que G_A soit non seulement optionnel mais «espace fibré semi-martingale»; la formule de transition entre deux cartes est $(t, \omega, g) \mapsto (t, \omega, \alpha(t, \omega)g)$, α semi-martingale; pour les sections, ce sera $X \mapsto \alpha X$]; alors dX n'existe pas. On étudie dans cet article une section différentielle de semi-martingale pour G_A optionnel, $dX, dX_{(t, \omega)} \in G_{(t, \omega)}$ symboliquement; dans la formule de transition, α est optionnelle, et, pour les sections, c'est $dX \mapsto \alpha dX$; dX existe, X n'existe pas, donc $dX, dX_{(t, \omega)} \in G_{(t, \omega)}$ est doublement symbolique ou abusive parce qu'on ne devrait pas l'appeler dX et qu'elle n'a pas de valeur en (t, ω) .

PROPOSITION (2.9). *Soit X une s.m. sur $A = [S, T]$ à valeurs dans une variété V de classe C^2 . Alors \underline{dX} est une d.s.m.v. section de $T^2(V)$ au dessus de X , \widetilde{dX} une d.v.f.v. section du même fibré, dX^c une d.m.v. section de $T^1(V)$ au dessus de X , $\frac{1}{2}dXdX$ une d.v.f.v. section de $T^1(V) \odot T^1(V)$ au dessus de X ; toutes pour la \mathcal{B} -structure naturelle définie à (1.5.2).*

DÉMONSTRATION. Occupons nous seulement de la première, \underline{dX} . Plongeons V comme sous-variété fermée d'un vectoriel E (Whitney); X devient une s.m. à valeurs dans E ; G_A devient sous fibré continu optionnel de l'image réciproque par X du fibré trivial $E \times (E \oplus (E \odot E))$, c'est à dire de $A \times (E \oplus (E \odot E))$, \mathcal{OB} -fibré trivial (1.5.1) à (1.6).

Alors \underline{dX} devient une d.s.m.f. sur A à valeurs dans $E \oplus (E \odot E)$, $\underline{dX} = \begin{pmatrix} dX \\ \frac{1}{2}dXdX \end{pmatrix}$,

et (2.6) nous dit qu'on doit simplement voir que c'est une d.s.m.v.; c'est la différentielle

de $\begin{pmatrix} X \\ \frac{1}{2}[X, X] \end{pmatrix}$, s.m.v. sur A à valeurs dans $E \oplus (E \odot E)$. On pourra consulter

SCHWARTZ [1], proposition (2.7) page 710. ■

REMARQUE. Nous avons dit à (2.8): \underline{dX}_t existe $\in T^2(V; X_t)$, mais \underline{X}_t n'existe pas; inversement X_t existe $\in V$, dX_t n'existe pas. Dans E tout existe, mais $dX_t \in E$, $\notin T^1(V; X_t)$, et $\underline{dX}_t \in E \oplus (E \odot E)$ ou $T^2(V; X_t)$, \underline{X}_t existe dans $E \oplus (E \odot E)$, non dans $T^2(V; X_t)$.

Exemple 2.10

Cet exemple est abondamment traité dans SCHWARTZ [1] et [2], mais pas toujours avec la distinction nécessaire entre d.s.m.f. et d.s.m.v. EMERY [1] l'explique très clairement. Considérons $\frac{1}{2}dXdX$ comme d.v.f.v. section de $T^1(V) \odot T^1(V)$ au dessus de X .

Soit β un champ sur V , borélien, borné sur tout compact de V , de formes bilinéaires sur $T^1(V) \times T^1(V)$ donc de formes linéaires sur $T^1(V) \otimes T^1(V)$, donc une section, borélienne bornée sur tout compact de V , de $(T^1(V) \otimes T^1(V))^*$, donc section optionnelle le long de X , à trajectoires localement bornées. Alors, d'après (2.7.2), $\beta \frac{1}{2} dX dX$ est une d.v.f.v. réelle, on peut prendre la primitive $t \mapsto \frac{1}{2} \int_S^t \beta_s dX_s dX_s$, processus à variation localement finie réel vrai sur $[S, T]$.

Exemple 2.11 Sur les connexions linéaires de fibrés vectoriels sur une variété

Soit V une variété C^1 , \mathcal{G}_V un fibré vectoriel (de dimension finie) C^1 sur V , muni d'une connexion linéaire continue. Si S est une section C^1 de \mathcal{G}_V , ξ un vecteur tangent $\in T^1(V; v)$, on peut définir la dérivée covariante $\nabla_\xi S \in \mathcal{G}_v$. Ce qui est moins connu, c'est que si L est un vecteur m -tangent, pour V de classe C^m , $L \in T^m(V; v)$, et si la connexion est C^{m-1} et la section S C^m , on peut définir la dérivée covariante suivant L , $\nabla_L S \in \mathcal{G}_v$ (R. S. PALAIS [1], section IV, théorème 7, page 90). Un des cas les plus connus est celui où V est une variété C^2 , riemannienne de classe C^1 , donc ayant un laplacien Δ , Δ section continue de $T^2(V)$ au dessus de V , et si S est C^2 et la connexion de \mathcal{G}_V C^1 , on peut calculer le «laplacien horizontal» ΔS , section continue de \mathcal{G}_V ; c'est exactement $\nabla_\Delta S$. On voit aussitôt que $(L, S) \mapsto \nabla_L S$ est bilinéaire. Mais bien entendu la structure d'algèbre des opérateurs différentiels sur V n'est pas conservée; si par exemple ξ, η , sont deux champs de vecteurs C^1 pour $m \geq 2$, des opérateurs différentiels C^1 d'ordre 1, le composé $\xi\eta$ est un opérateur différentiel continu d'ordre 2, $\nabla_{\xi\eta} \neq \nabla_\xi \nabla_\eta$, sans quoi on aurait $\nabla_{\{\xi, \eta\}} = \nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi$, alors que la différence entre les deux est la courbure de la connexion de \mathcal{G}_V .

Soit maintenant, avec $m = 2$, X une V -semi-martingale sur $A = [S, T]$. On sait que, symboliquement, \underline{dX}_t est un petit vecteur 2-tangent au point X_t , $\underline{dX}_t \in T^2(V; X_t)$. On doit donc pouvoir définir $\nabla_{\underline{dX}_t} S \in g_{x_t} = G_t$, petit vecteur de \mathcal{G}_{X_t} ou G_t, G_A image réciproque de \mathcal{G}_V par $X, G_A = \mathcal{G}_V \circ X, G_{t,\omega} = \mathcal{G}_{X(t,\omega)}$. Ceci va évidemment se régler en termes de d.s.m.f. section de \mathcal{G}_V au dessus de X ou de $G_A = \mathcal{G}_V \circ X$. En effet, \underline{dX} est une d.s.m.f. section de $T^2(V; X)$, et $\alpha : L \mapsto \nabla_L S$ (pour S fixé) est une section continue du fibré $\mathcal{L}(T^2(V); \mathcal{G}_V)$ sur V , donc $\alpha \circ X$ une section continue optionnelle du fibré continu optionnel $\mathcal{L}(T^2(V; X); \mathcal{G}_V \circ X)$, ou du fibré $\mathcal{L}(T^2(V); \mathcal{G}_V)$ le long de X . Donc $\nabla_{\underline{dX}} S = (\alpha \circ X) \underline{dX}$ est une d.s.m.f. section de \mathcal{G}_V le long de X ou une d.s.m.f. section de $\mathcal{G}_V \circ X = G_A$. Mais \underline{dX} est une d.s.m.v., et α , continue, est une section de $\mathcal{L}(T^2(V); \mathcal{G}_V)$ bornée sur tout compact de V , donc $\alpha \circ X \in \mathcal{OB}(\mathcal{L}(T^2(V; X); \mathcal{G}_V \circ X)$ (le fibré vectoriel $\mathcal{L}(T^2(V); \mathcal{G}_V)$) sur V est projectif, voir (1.5.2)), et $(\alpha \circ X) \underline{dX} = \nabla_{\underline{dX}} S$ est une d.s.m.v. section de V le long de X . Ceci donne un cas très général: les d.s.m.f. usuelles des probabilités deviennent des d.s.m.v., si $A = [S, T]$. Si Σ est une section de \mathcal{G}_V^* , borélienne bornée sur tout compact de V , donc $\Sigma \circ X$ une section $\in \mathcal{OB}(\mathcal{G}_V^* \circ X)$, on peut, par (2.7.2), calculer $(\Sigma \circ X)(\nabla_{\underline{dX}} S)$, différentielle d'une semi-martingale vraie, réelle, qu'on pourra écrire

sous forme intégrée, en s.m.v. réelle: $t \mapsto \int_S^t \sum_{X_s} (\nabla_{dX_s} S)$. (Excuses: les deux S de cette formule n'ont pas le même signification.) Sa composante martingale, par exemple, sera $t \mapsto \int_S^t \sum_{X_s} (\nabla_{dX_s}(S))$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] M. EMERY, [1]: *Géométrie différentielle stochastique, à paraître*; chapitre III, théorème (3.8).
- [2] P. A. MEYER, [1]: *Sur un résultat de L. SCHWARTZ*, Séminaire de probabilités XIV, 1978-1979, Lecture Notes in Mathematics, 784, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980, page 102-103.
- [3] P. A. MEYER – C. STRICKER, [1] *Sur les martingales au sens de L. SCHWARTZ*, Mathematical Analysis and Applications, vol. B, Academic Press 1981, 577-601.
- [4] R. S. PALAIS, [1]: *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Annals of Mathematics Studies, 57 (1965), Princeton University Press.
- [5] L. SCHWARTZ, [1]: *Les gros produits tensoriels en analyse et en probabilités*, volume en l'honneur de Léopoldo Nachbin, Aspects of Mathematics and its applications, Elsevier Science Publishers, 1986.
- [6] L. SCHWARTZ, [2]: *Géométrie différentielle du 2ème ordre, semi-martingales et equations différentielle stochastique su une variété!* Sèminaire de Probabilités XVI, 1980-1981. Suppl. Géométrie différentielle stochastique, Lecture Notes in Math. 921, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982, pages 1-150.
- [7] L. SCHWARTZ, [3]: *Les semi-martingales formelles*, Séminaire de Probabilités XV, 1979-80, Lecture Notes in Math. 850, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981, pages 44-117.

Manuscript received: September 9, 1989